

MATEMATICA ED EDUCAZIONE: IL RUOLO FONDAMENTALE DEI LINGUAGGI

Parte I

Introduzione

Questa ricerca è nata dalle convinzioni che mi sono formato a proposito delle difficoltà degli studenti di diversi livelli scolari e dei legami di queste con il linguaggio. È stata influenzata e anche stimolata dall'insoddisfazione nei confronti di punti di vista e atteggiamenti nei confronti dei linguaggi (talvolta reciprocamente contrapposti) abbastanza diffusi fra i matematici o i ricercatori in educazione matematica. Più precisamente, ho sentito l'esigenza di tener conto di due aspetti apparentemente divergenti: la specificità della matematica e del suo linguaggio e il ruolo del contesto (spazio, tempo, persone, ...) nella comunicazione matematica.

Il linguaggio non è soltanto una sorgente di difficoltà ma gioca un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento. Quale sia quel ruolo è oggetto di discussioni vivaci. Nella sezione successiva metterò a confronto alcune delle posizioni contrapposte di ricercatori attivi in educazione matematica. In ogni caso, le potenzialità di lavori integrati linguaggi-matematica con gli alunni di scuola primaria e secondaria sono notevoli e in buona parte inesplorate. Questo aspetto verrà affrontato soprattutto nella seconda parte dell'esposizione.

L'indagine è anche motivata dal problema di insegnare matematica ad alunni provenienti da gruppi linguistici diversi. Attualmente questo tema rappresenta la grande maggioranza dei research reports dedicati ai problemi linguistici accettati ai convegni PME negli ultimi anni.

I dati su cui sono condotte le analisi della prima parte riguardano il livello della scuola secondaria e, soprattutto, quello universitario, in particolare le matricole della Facoltà di Scienze M.F.N.. I comportamenti che emergono, come si tenterà di documentare, indicano difficoltà linguistiche che non sono limitate alla sola matematica, anche se questa è indubbiamente un terreno privilegiato per metterle in luce. Dall'analisi delle difficoltà emerge che le maggiori possibilità di intervento preventivo a livello scolastico si collocano nella fascia 6-14. Per questo nelle proposte di attività didattiche sono presenti esempi che riguardano scuola elementare e scuola media.

Lo scopo dell'indagine è di elaborare strumenti per identificare e interpretare diversi comportamenti linguistici che influenzano pesantemente le prestazioni in matematica, e progettare attività didattiche adeguate. Per fare questo non basta studiare alcune proprietà specifiche delle notazioni matematiche ma è necessario costruire un quadro di riferimento che utilizzi alcuni risultati della linguistica per formulare e verificare ipotesi credibili sulle origini delle difficoltà e sulle funzioni dei linguaggi (e in particolare del linguaggio matematico) nell'apprendimento.

Lo studio delle caratteristiche specifiche del linguaggio matematico si collega alle riflessioni di G.Vailati (1908) sulla 'grammatica dell'algebra'. Di questa Vailati mette in luce l'importanza per la psicologia dell'apprendimento matematico e sostiene l'opportunità di studiarla in relazione al contesto matematico. Vailati conclude l'articolo sostenendo in modo chiaro l'opportunità di un approccio al linguaggio dell'algebra basato sulle interpretazioni e sugli usi e l'esigenza di superare la tradizionale distinzione fra materie letterarie e scientifiche.

Va diventando sempre più un luogo comune, nelle discussioni sull'ordinamento degli studi nelle nostre scuole secondarie, il lamento sui danni derivanti, allo studio delle lingue antiche o moderne, dell'impiego di metodi troppo «grammaticali» o «filologici», dalla troppa parte, cioè, che è fatta ordinariamente, nei primi stadi dell'insegnamento, all'enumerazione delle regole grammaticali, in confronto allo scarso tempo e alla minor cura dati invece agli esercizi di interpretazione e di conversazione.

A questo che si ritiene comunemente essere un difetto particolare dell'insegnamento delle lingue, fanno riscontro, a mio parere, dei difetti non solo analoghi, ma addirittura identici in quella parte

dell'insegnamento scientifico che ha per scopo di fare acquistare agli alunni la capacità di servirsi delle notazioni dell'algebra.

Promuovere un chiaro riconoscimento di questa specie di solidarietà tra due rami d'insegnamento che la tradizionale distinzione delle «materie» in letterarie e scientifiche tende a far riguardare come eterogenei e privi di qualsiasi rapporto tra loro equivale a render possibile, tra i cultori dei due ordini di disciplina, uno scambio d'idee che non mancherebbe di riuscire fecondo di eguali vantaggi per ambedue le parti¹.

Uno studio di questo tipo sarà quello che cercherò di fare nel resto di questa presentazione.

Matematica, semiotica, linguaggi

Le posizioni circa i rapporti fra linguaggi e apprendimento della matematica sono svariate. Per capire meglio i temi in gioco può essere utile una breve panoramica, limitata ad autori contemporanei e al settore dell'educazione matematica.

Una posizione estrema è quella di Usiskin (1996) per cui la matematica è una lingua e può essere appresa con le tecniche di immersione totale attraverso cui si apprendono usualmente le lingue straniere:

"Because mathematics is a living second language, for most students, at a minimum we should teach mathematics as we do living foreign languages - in context, starting as early as we can and immersing students in the language". [Usiskin, 1996, p.242]²

Questa posizione, che muove da un'interpretazione dei linguaggi appiattita sulla dimensione grammaticale, non ha probabilmente una grande rilevanza sul piano della ricerca ma corrisponde a luoghi comuni ampiamente diffusi³. Essa trascura diverse peculiarità della matematica e del suo linguaggio, contraddice le esperienze di molti insegnanti e verrà confutata, direttamente o indirettamente, dalle considerazioni che saranno sviluppate nel corso del seminario.

Un punto importante, su cui si registrano divergenze nette, è il rapporto fra conoscenza e rappresentazione, tra *noesis* e *semiosis*. Strettamente legata a questa è la questione dei rapporti fra sviluppo del pensiero e processi di comunicazione. Un quadro molto articolato è quello di Duval (1995, 2000). Per Duval non c'è *noesis* senza *semiosis*:

"L'analyse des problèmes de l'apprentissage des mathématiques et des obstacles auxquels les élèves se heurtent régulièrement conduit à reconnaître derrière la seconde hypothèse une loi fondamentale du fonctionnement cognitif de la pensée: il n'y a pas de *noésis sans sémiotique*, c'est-à-dire sans le recours à une pluralité au moins potentielle de systèmes sémiotiques, recours qui implique leur coordination pour le sujet lui-même." [Duval, 1995, p.5, enfasi come nell'originale]⁴

Secondo Duval, le rappresentazioni semiotiche sono fondamentali in matematica da tre punti di vista. Prima di tutto consentono l'applicazione di trattamenti: gli algoritmi lavorano sulle rappresentazioni, non sui concetti⁵. In secondo luogo, la creazione di sistemi di rappresentazione

¹ Vailati (1908, p.110)

² "Poiché la matematica è una seconda lingua viva, per molti studenti, come minimo dovremmo insegnare la matematica come insegnamo le lingue straniere - in contesto, cominciando più presto che si può e immergendo gli studenti nel linguaggio."

³ È abbastanza diffusa la pratica retorica di accostare matematica e linguaggio, senza peraltro esplicitare in modo credibile le ragioni degli accostamenti, magari facendosi scudo della famosa metafora galileiana. Un esempio è il libro di Devlin (2000), che, benché intitolato 'The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible', non fa alcun riferimento esplicito né a linguaggi né a funzioni linguistiche della matematica, tranne un fugace cenno alla notazione algebrica.

⁴ "L'analisi dei problemi di apprendimento della matematica e degli ostacoli con i quali gli studenti si scontrano regolarmente porta a riconoscere dietro la seconda ipotesi una legge fondamentale del funzionamento cognitivo del pensiero: non c'è *noesis senza semiosis*, senza cioè il ricorso a una pluralità almeno potenziale di sistemi semiotici, ricorso che comporta il loro coordinamento da parte del soggetto stesso."

⁵ Per un'analisi approfondita del ruolo delle notazioni in matematica, ovviamente da un'altra prospettiva, si veda il libro di Lolli (1996).

specifici è un passaggio comune nello sviluppo di tutte le scienze⁶. Infine, le rappresentazioni mentali, che Duval distingue da quelle semiotiche, sono il risultato di processi di interiorizzazione di queste ultime⁷. La disponibilità di più sistemi semiotici permette diverse rappresentazioni di uno stesso 'oggetto', il che arricchisce le capacità cognitive dei soggetti e le loro rappresentazioni mentali⁸.

Su posizioni opposte, almeno per alcuni aspetti, si colloca la scuola di Lakoff⁹, per cui l'attività linguistica è il riflesso di quella cognitiva e dipende strettamente da questa. La posizione di Lakoff quale risulta dalle opere più recenti è molto complessa e non facile da schematizzare. Pur rimanendo in un quadro cognitivista¹⁰, egli muove dalla critica di alcuni aspetti delle teorie di Chomsky, rifiutando fra l'altro l'indipendenza della grammatica da fattori come significati, contesti, cultura, esperienza corporea, metafore. La differenza rispetto alle (numerose) altre teorie che contengono affermazioni simili (come, nel caso dell'educazione matematica, quelle di Sfard o di Radford) sta principalmente nel fatto che per lui i linguaggi sono manifestazioni di superficie di processi cognitivi profondi. Quindi secondo questo orientamento è possibile separare i concetti dalla loro forma linguistica e un linguaggio riflette una cultura ma non contribuisce a determinarla. Nei lavori citati non ho trovato passaggi in cui lui o i suoi collaboratori mostrino interesse per le rappresentazioni semiotiche o attribuiscono esplicitamente a linguaggi e comunicazione in quanto tali influenze sulla cultura o sullo sviluppo del pensiero. In particolare, una metafora non appartiene, come per gran parte dei linguisti¹¹, alla sfera linguistica, ma a quella cognitiva, e quindi non dipende dalle caratteristiche del linguaggio in cui è formulata:

"Unlike traditional studies on metaphor, contemporary embodied views don't see conceptual metaphors as residing in words, but in thoughts. Metaphorical linguistic expressions thus are only surface manifestations of metaphorical thought." [Núñez *et al.*, 1999, p.52]¹²

È evidente che, se si ritiene che le rappresentazioni semiotiche (indispensabili per comunicare) siano fenomeni di superficie, è difficile attribuire alla comunicazione un ruolo rilevante nello sviluppo del pensiero e quindi nell'educazione. Tra le teorie che attribuiscono invece grande peso alla comunicazione in matematica vi sono le interpretazioni della 'matematica come discorso', espresse di recente con chiarezza da Anna Sfard:

"The basic tenet of the communicational approach to the study of human cognition is that thinking may be conceptualized as a case of communication, that is, as one's communication with oneself. Indeed, our thinking is clearly a dialogical endeavor, where we inform ourselves, we argue, we ask questions, and we wait for our own response. The conceptualization of thinking as communication is an almost inescapable implication of the thesis on the inherently social origins of all human activities. Anyone who believes, as Vygotsky did, in the developmental priority of communicational public speech over inner private speech (e.g. Vygotsky, 1987) must also admit that whether phylogenesis or ontogenesis is considered, thinking arises as a modified private version of interpersonal communication." [Sfard, 2001, p.26]¹³

⁶ Questa linea di pensiero è stata sviluppata da Granger (1979, p.21-47). Conclusioni simili derivano, nel quadro della linguistica funzionale, dalle analisi di Leckie-Tarry (1995).

⁷ Il riferimento d'obbligo è Vygotskij (1992)

⁸ Questi punti di vista, oltre che da Duval, sono stati sviluppati da Benveniste (1966) e da Douady (1984).

⁹ In questa presentazione si fa riferimento a Lakoff (1987), Lakoff & Johnson (1999), Lakoff & Núñez (1997), Lakoff & Núñez (2000), Núñez, Edwards & Matos (1999). Sono numerose anche le recensioni e le reazioni alle opere di Lakoff & Núñez, come ad esempio Auslander (2001), Dubinsky (1999), Gold (2001), Goldin (2001), Lolli (2002a, 2003), Madden (2001), Paulos (2001), Presmeg (2002), Schiralli & Sinclair (2003), nelle quali i lavori vengono esaminati (e in quasi tutti i casi, aspramente criticati) da una grande varietà di punti di vista.

¹⁰ Lakoff & Johnson (1999) definiscono la loro posizione 'cognitivismo di seconda generazione'.

¹¹ Si veda ad esempio Eco (1984, pp.141 e segg.).

¹² "A differenza degli studi tradizionali sulla metafora, il punto di vista contemporaneo dell'embodiment vede le metafore concettuali come qualcosa che sta non nelle parole, ma nei pensieri. Le espressioni linguistiche metaforiche sono quindi soltanto manifestazioni di superficie del pensiero metaforico."

¹³ "Il principio basilare dell'approccio comunicativo allo studio della cognizione umana è che il pensiero può essere concettualizzato come un caso di comunicazione, vale a dire come comunicazione con sé stessi. Infatti, il nostro

"Learning mathematics may now be defined as an initiation to mathematical discourse, that is, initiation to a special form of communication known as mathematical." [*ibidem*, p.28]¹⁴

Anche Sfard attribuisce un ruolo rilevante alle metafore, ma la sua interpretazione è lontana da quella espressa da Lakoff, Núñez e i loro collaboratori:

"Indeed, some people seem to be talking about metaphors in much the same way as other researchers talk about *mental models*. In this latter approach language does not have to play a prominent role. Since, however, language is the medium through which metaphor comes into being and influences our thinking, I view the discourse on metaphor as inseparable from the discourse on language. It is the way we speak, the way we transplant linguistic expressions from one context to another, which shapes our way of looking at the world." [Sfard, 1997, p.343]¹⁵

Posizioni di questo tipo hanno dato origine a un ampio spettro di ricerche e di idee didattiche. Una posizione che suggerisce interpretazioni profonde e spunti di ricerca originali è quella di Radford, che rifiuta la contrapposizione tra espressione e contenuto (o, anche, fra struttura di superficie e struttura profonda)¹⁶. Secondo Radford i quadri teorici che adottano tali contrapposizioni sono inadeguati per diversi motivi, soprattutto perché interpretano la relazione soggetto/oggetto come non mediata culturalmente, e la costruzione del significato appare il risultato della relazione fra il soggetto isolato e un oggetto a-storico. Radford assume invece due idee fondamentali.

"The first one is the Vygotskian idea according to which our cognitive functioning is intimately linked, and *affected by*, the use of signs. ... As a result, there is a theoretical shift from what signs *represent* to what they *enable* us to do. The second basic idea on which our framework is based deals with the meaning of signs and stresses the fact that the signs *with* which the individual acts and *in* which the individual thinks belong to cultural symbolic systems which transcend the individual *qua* individual. Signs hence have a double life. On the one hand, they function as tools allowing the individuals to engage in cognitive praxis. On the other hand, they are part of those systems transcending the individual and through which a social reality is objectified. The sign-tools with which the individual thinks appear then as framed by social meanings and rules of use and provide the individual with social means of semiotic objectification." [*ibidem*, p.240-241, enfasi come nell'originale]¹⁷

Anche la posizione di Radford, che sottolinea la funzione strumentale dei segni e la loro 'doppia vita' (sul piano individuale e su quello sociale) è lontana da quella di Lakoff e Núñez. Un fattore di confusione risiede nella diversa interpretazione di 'cultura' adottata da questi autori. Questo influenza anche gli atteggiamenti nei confronti dei fenomeni sociali, e in particolare di quelli

pensiero è chiaramente uno sforzo dialogico con il quale informiamo noi stessi, discutiamo, poniamo domande, e aspettiamo la nostra risposta. La concettualizzazione del pensiero come comunicazione è una conseguenza quasi inevitabile della tesi delle origini intrinsecamente sociali di tutte le attività umane. Chiunque creda, come Vygotsky, nella priorità evolutiva del discorso comunicativo pubblico sul discorso interiore privato (e.g. Vygotsky, 1987) deve anche ammettere che sia che si consideri la filogenesi, sia l'ontogenesi, il pensiero sorge come versione privata modificata della comunicazione interpersonale."

¹⁴ "L'apprendimento della matematica può ora essere definito come un'iniziazione al discorso matematico, cioè, iniziazione a una speciale forma di comunicazione nota come matematica."

¹⁵ "Di fatto, alcuni sembrano parlare di metafore esattamente come altri ricercatori parlerebbero di *modelli mentali*. In quest'ultimo approccio il linguaggio non deve giocare un ruolo rilevante. Dal momento che, comunque, il linguaggio è il mezzo attraverso il quale la metafora viene posta in essere e influenza la nostra attività di pensiero, io vedo il discorso sulla metafora inseparabile dal discorso sul linguaggio. È il modo in cui parliamo, il modo in cui trasferiamo espressioni linguistiche da un contesto all'altro, che plasma il nostro modo di guardare il mondo."

¹⁶ Radford (2000, pp.239-241). Si veda anche Radford (2002) per un'interessante studio sulla stessa linea.

¹⁷ "La prima è l'idea di Vygotskij per cui il nostro funzionamento cognitivo è intimamente legato e *influenzato* dall'uso dei segni. Di conseguenza c'è un passaggio teorico da ciò che i segni *rappresentano* a ciò che i segni ci *consentono* di fare. La seconda idea sulla quale è basato il mio quadro ha a che fare con il significato dei segni e sottolinea il fatto che i segni *con* cui l'individuo agisce e *in* cui l'individuo pensa appartengono a sistemi simbolici culturali che trascendono l'individuo in quanto individuo. I segni hanno quindi una doppia vita. Da un lato, funzionano come strumenti che permettono gli individui di impegnarsi nella prassi cognitiva. Dall'altro, sono parte di quei sistemi che trascendono l'individuo e attraverso cui si oggettivizza una realtà sociale. I segni-strumenti con cui l'individuo pensa sembrano allora inquadrati da significati sociali e regole di uso e forniscono all'individuo i mezzi sociali di oggettivizzazione semiotica."

linguistici. Ad esempio, Bruner (1990) attribuisce a 'cultura' un significato molto ampio, che va ben oltre le interpretazioni cognitiviste a cui sembrano più legati Lakoff e i suoi collaboratori. Per Bruner anche il significato non è indipendente dai linguaggi condivisi:

"... meaning itself is a culturally mediated phenomenon that depends upon the prior existence of a shared symbol system." [Bruner, 1990, p.69]¹⁸

Sul versante opposto, oltre alla scuola di Lakoff già citata, il punto di vista secondo cui lo sviluppo del pensiero è preliminare ai processi di comunicazione è espresso con molta chiarezza da Dubinsky (2000). Dubinsky critica sia le posizioni di Lakoff, che giudica sterili sul piano pedagogico e inadeguate sul piano cognitivo, sia quelle di Sfard, che giudica inadatte a spiegare i processi di sviluppo del pensiero matematico avanzato.

"Perhaps the fundamental difference I have with these authors rests on Sfard's contention that "... the way we speak ... shapes our way of looking at the world." My experience and research suggests that it is the other way around." [Dubinsky, 2000, p.221]¹⁹

"Although the idea of using metaphors to create mathematical concepts in the minds of individuals is very attractive in that it can give mathematics an aesthetic literary flavor, I remain convinced that language is a tool whose real value is the expression of ideas which an individual already has constructed. I do not feel there is any reason to believe that it is powerful enough to be useful in creating more than the simplest mathematical concepts." [*ibidem*, p.238]²⁰

In questi passaggi Dubinsky accomuna le posizioni di Lakoff e Núñez e di Sfard come se entrambi i punti di vista attribuissero grande importanza al linguaggio verbale. In effetti questo è vero solo per Sfard. Dubinsky distingue tra il linguaggio verbale, che secondo lui ha un ruolo secondario nella concettualizzazione, e il formalismo matematico, che può invece favorire la costruzione dei concetti matematici avanzati.

Posizioni di rifiuto o disinteresse nei confronti delle pratiche didattiche basate sulla comunicazione (e di sottovalutazione delle funzioni e delle potenzialità del linguaggio verbale) sono latenti (anche se non sempre dichiarate esplicitamente) in molti ambienti matematici.

Nel seguito dell'esposizione si vedrà che le mie posizioni sono molto più vicine a quelle di Duval, Radford e Sfard rispetto a quelle di Dubinsky e, soprattutto, di Lakoff e Núñez. È evidente che se il pensiero è una forma di comunicazione, allora la qualità del linguaggio adottato influenza la qualità del pensiero e la competenza linguistica assume un'importanza decisiva. Tuttavia il quadro che presento nelle prossime sezioni non ha bisogno di ipotesi così forti. Io spero infatti che il mio lavoro possa essere utile anche a chi non aderisce a tesi di questo tipo e ritiene che il linguaggio serva a esprimere e comunicare concetti già costruiti. Anche in questa prospettiva le difficoltà di comunicazione sono da considerarsi gravi e tali da ostacolare pesantemente, seppur indirettamente, i processi di apprendimento e di valutazione scolastica.

¹⁸ "... lo stesso significato è un fenomeno mediato culturalmente che dipende dall'esistenza preliminare di un sistema simbolico condiviso."

¹⁹ "Forse la principale divergenza che ho con questi autori si appoggia sull'opinione di Sfard che "... il modo in cui parliamo ... plasma il nostro modo di guardare il mondo." La mia esperienza e ricerca suggerisce che è il contrario."

²⁰ "Sebbene l'idea di usare metafore per creare concetti matematici nelle menti degli individui sia molto attraente in quanto può dare alla matematica un profumo estetico letterario, rimango convinto che il linguaggio è uno strumento il cui valore reale è l'espressione di idee che un individuo ha già costruito. Non penso che ci siano ragioni per credere che esso sia abbastanza potente per essere utile nella creazione di qualcosa in più dei concetti matematici più semplici."